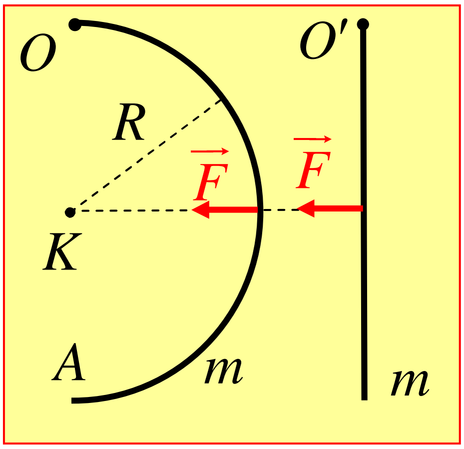
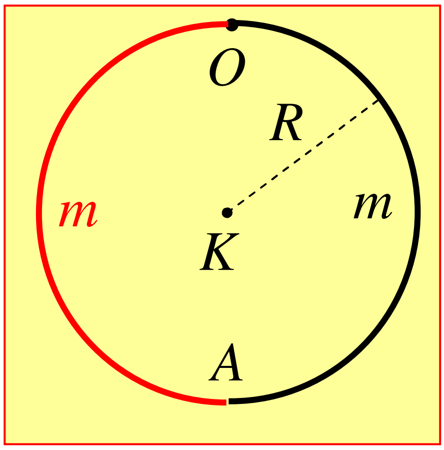
Ένα ημικυκλικό σύρμα.



Δίδεται ένα ημικυκλικό σύρμα, μάζας m και ακτίνας R.
Βρείτε:

1. Την ροπή αδρανείας του ως προς άξονα κάθετο στο σχήμα, διερχόμενο από το O.
2. Να συγκρίνετε την γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά με αυτήν που αποκτά η ράβδος του σχήματος, η οποία δέχεται ίδια δύναμη στο μέσον της.
3. Να βρείτε την θέση του κέντρου μάζας του ημικυκλίου (όχι για μαθητές).
4. Με δεδομένο το ότι το κέντρο μάζας του ημικυκλίου απέχει από το K απόσταση 2R/π , σε ποια θέση ισορροπεί αναρτηθεί από το O;
5. Υπολογίσατε την γωνιακή ταχύτητα με την οποία φτάνει στην εικονιζόμενη θέση, αν αφεθεί από θέση στην οποία η OA είναι οριζόντια.

Απάντηση:



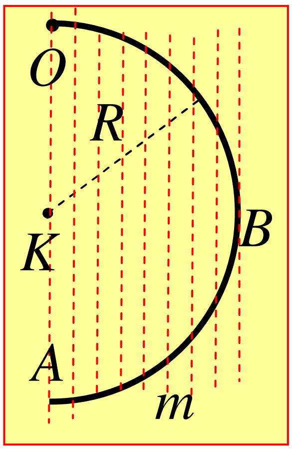
1. Κολλάμε δύο τέτοια δαχτυλίδια ώστε να σχηματίσουν έναν κυκλικό δακτύλιο. Προκύπτει ένας κυκλικός δακτύλιος με ροπή αδράνειας ως προς άξονα διερχόμενο από το K (κάθετο στο σχήμα) ίση προς;
$I_{ολ} = 2m \cdot R^2$
Με την βοήθεια του θεωρήματος Steiner βρίσκουμε ότι η ροπή αδράνειας ως προς άξονα διερχόμενο από το O είναι:
$I'_{ολ} = I_{ολ} + 2m \cdot R^2 = 4m \cdot R^2$
Την ροπή αδράνειας την έχουν τα δύο όμοια σύρματα συνολικά.
Δηλαδή $2I = 4m \cdot R^2 \Rightarrow I = 2m \cdot R^2$

2. Η ροπή αδράνειας της ράβδου (ως προς άξονα διερχόμενο από το O' και κάθετο στο σχήμα) υπολογίζεται με την βοήθεια του θεωρήματος Steiner:

$$I_{\rho} = \frac{m \cdot \ell^2}{12} + m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot \ell^2}{3} = \frac{4}{3} m \cdot R^2 .$$

Η ράβδος έχει μικρότερη ροπή αδράνειας και επομένως, δεχόμενη ίδια ροπή, αποκτά μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση.

3. **Όχι για μαθητές.**



Αναμενόμενο είναι το ότι το κέντρο μάζας απέχει από το K απόσταση μεγαλύτερη από $R/2$. Γιατί;

Αν χαράξουμε τις ισαπέχουσες εστιγμένες ευθείες αυτές οριοθετούν τμήματα του ημικυκλίου.

Τα τμήματα αυτά έχουν μικρότερη κλίση στις περιοχές κοντά στο K, και επομένως μικρότερο μήκος. Επειδή η μάζα κάθε τμήματος είναι ανάλογη του μήκους του, τα τμήματα αυτά έχουν μικρότερη μάζα από τα πιο μακρινά. Έτσι το κέντρο μάζας είναι πλησιέστερα στο B παρά στο K.

Όμως πρέπει να δείξουμε πως η απόσταση του κέντρου μάζας είναι $2R/\pi$.

Ας μην το κάνουμε με ολοκληρώματα. Παράθεμα από την:
«Ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς και ημείς».

Πρώτο θεώρημα:

Το εμβαδόν A της επιφανείας εκ περιστροφής που παράγεται από την περιστροφή μιας επίπεδης καμπύλης C γύρω από έναν άξονα που βρίσκεται εκτός της C και στο ίδιο επίπεδο με αυτήν, είναι ίση με το γινόμενο του μήκους του τόξου s της C επί την απόσταση d που διανύθηκε από το γεωμετρικό κέντρο βάρους της.

Η περιστροφή του ημικυκλίου κατά 360^o μας δίνει μια σφαίρα. Το εμβαδόν της είναι κατά Πάππον:

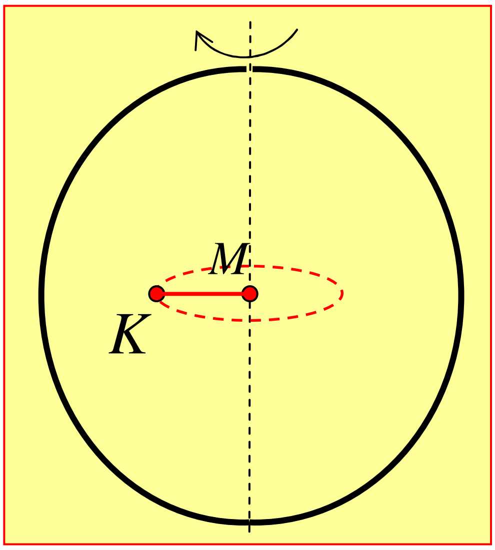
$$A = s \cdot d = \pi \cdot R \cdot 2\pi \cdot (KM) = 2\pi^2 R \cdot (KM)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι το εμβαδόν σφαίρας είναι:

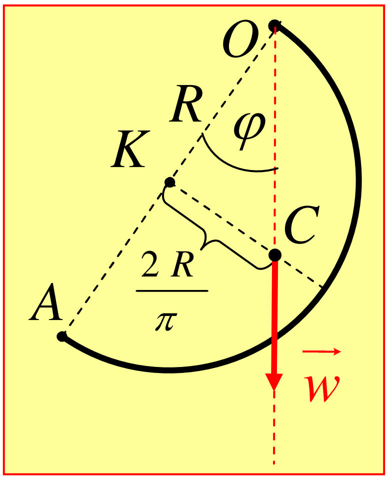
$A = 4\pi \cdot R^2$.

Συνδυάζοντας τις δυο σχέσεις έχουμε:

$$2\pi^2 R \cdot (KM) = 4\pi \cdot R^2 \Rightarrow (KM) = \frac{2 \cdot R}{\pi} \approx 0,64 \cdot R$$



4. **Και για μαθητές.**



Στη θέση ισορροπίας, το βάρος δεν πρέπει νε έχει ροπή ως προς το σημείο ανάρτησης.
Έτσι θα πρέπει το κέντρο μάζας C να βρίσκεται στην κατακόρυφο που περνάει από το O.

Τότε όμως $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{\frac{2R}{\pi}}{R} = \dfrac{2}{\pi}$.

Η γωνία είναι περίπου $32,48^o$.

Η απόσταση $(OC) = \dfrac{R}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \approx 1,19 \cdot R$.

5. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα;
Η δυναμική ενέργεια μειώθηκε κατά:

$$m \cdot g \cdot R \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)$$

Απέκτησε κινητική ενέργεια:

$$\frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = m \cdot R^2 \cdot \omega^2$$

Η διατήρηση ενέργειας επιβάλλει:

$$m \cdot R^2 \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot R \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R} \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)}$$

Η ταχύτητα του A είναι:

$$\upsilon_A = \omega \cdot 2R = 2\sqrt{g \cdot R \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)}$$