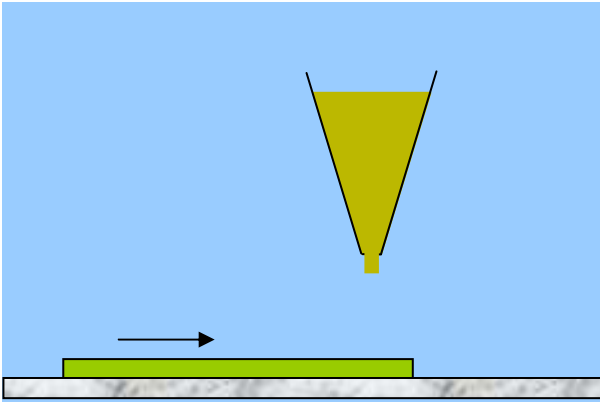


## Όταν άμμος πέφτει σε μια σανίδα.



Μια μεγάλη μήκους σανίδα έχει μάζα  $M$ . Κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο δάπεδο.

Η αρχική της ταχύτητα είναι  $V$ .

Από το χωνί πέφτει άμμος με ρυθμό  $dm/dt = \lambda$ .

Σε πόσο χρόνο θα υποδιπλασιαστεί η ταχύτητά της;

### Απάντηση:

Η ορμή του συστήματος διατηρείται στον οριζόντιο άξονα, διότι ουδεμία δύναμη δέχεται κατ' αυτόν.

$$\text{Έτσι } \frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow m \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot v = 0 \quad (1)$$

Την στιγμή  $t$  έχει πέσει μάζα  $\lambda \cdot t$  στην σανίδα. Η μάζα του συστήματος είναι  $m = M + \lambda \cdot t$ .

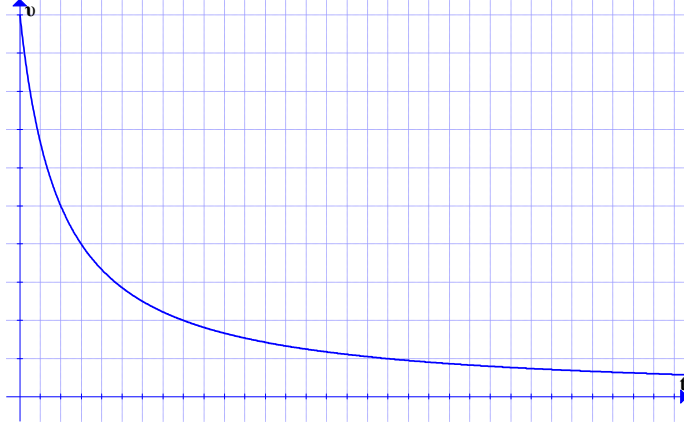
$$\text{Έτσι (1)} \Rightarrow (M + \lambda \cdot t) \cdot \frac{dv}{dt} + \lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\lambda}{M + \lambda \cdot t} \cdot dt \Rightarrow d \ln(v) = -\frac{1}{M + \lambda \cdot t} \cdot d(M + \lambda \cdot t)$$

$$\Rightarrow d \ln(v) = -d \ln(M + \lambda \cdot t)$$

Ολοκληρώνω και.....

$$\ln \frac{v}{V} = \ln \frac{M}{M + \lambda \cdot t} \Rightarrow \frac{v}{V} = \frac{M}{M + \lambda \cdot t} \Rightarrow v = V \cdot \frac{M}{M + \lambda \cdot t}$$

Γραφική παράσταση:



Έτσι η ταχύτητα θα μείνει η μισή όταν:

$$\frac{V}{2} = V \cdot \frac{M}{M + \lambda \cdot t} \Rightarrow M + \lambda \cdot t = 2M \Rightarrow t = \frac{M}{\lambda}$$

Την στιγμή εκείνη έχει πέσει πάνω στη σανίδα μάζα άμμου τόση, όση η μάζα της σανίδας.

### Η εξίσωση κίνησης της σανίδας.

$$\text{Βρήκαμε ότι } v = V \cdot \frac{M}{M + \lambda \cdot t}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = V \cdot \frac{M}{M + \lambda \cdot t} \Rightarrow dx = V \cdot \frac{M}{M + \lambda \cdot t} \cdot dt$$

Ολοκληρώνω και .....

$$x = V \cdot M \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left( \frac{M + \lambda \cdot t}{M} \right)$$

Την στιγμή που έχουμε την μισή ταχύτητα, είδαμε ότι  $\lambda \cdot t = M$ .

Η μετατόπιση της σανίδας είναι:

$$x = V \cdot M \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \ln 2 \approx 0,69 \cdot \frac{V \cdot M}{\lambda}$$

Γραφική παράσταση:

