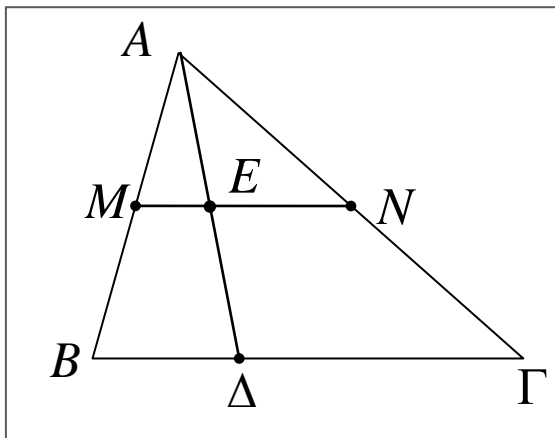


Η κίνηση ενός γεωμετρικού τόπου.

Η συζήτηση για τη ταχύτητα που έχει το νερό της επιφάνειας και η σχέση της με την ταχύτητα της επιφάνειας με οδηγούν σε σκέψεις που γράφω παρακάτω.

Τι σημαίνει ταχύτητα ενός σημείου;



Η ΑΔ τέμνει την μεσοπαράλληλο ΜΝ του τριγώνου στο Ε.

Αν το σημείο Δ κινείται με ταχύτητα 2 cm/s αποδεικνύεται εύκολα από την ομοιότητα των τριγώνων ότι η ταχύτητα του Ε είναι 1 cm/s.

Τι σημαίνει αυτό;

Τα σημεία του επιπέδου δεν κινούνται.

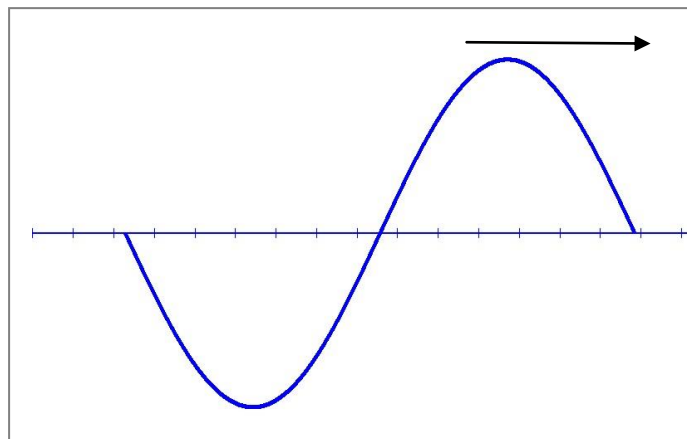
Τα εικονοστοιχεία της οθόνης που έχουμε μπροστά μας δεν κινούνται. Οι διαδοχικές χαράξεις της ΑΔ δίνουν κάθε φορά ένα διαφορετικό σημείο. Για να μιλάμε με λίγα λόγια, λέμε ότι το σημείο Ε κινείται με κάποια ταχύτητα.

Δεν θα ήταν βολικό να πούμε ότι «το πηλίκο $\frac{(EE')}{\Delta t} = 1 \frac{cm}{s}$, όπου Ε το αρχικά χαραχθέν σημείο, Ε' το τελικά χαραχθέν και Δt το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο χαράξεων.

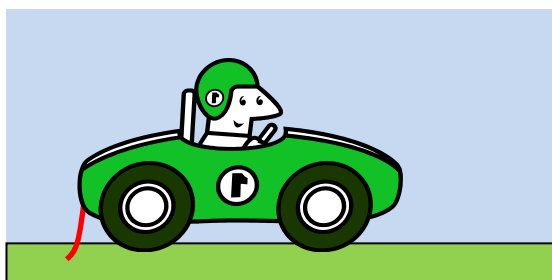
Έτσι μιλάμε για την ταχύτητα ενός όρους εγκάρσιου κύματος ή ενός παλμού.

Φυσικά τα σημεία του ελαστικού μέσου δεν διαθέτουν τέτοια ταχύτητα. Οι ταχύτητές τους είναι και πολύ μικρότερες και κατακόρυφες.

Άλλο η ταχύτητα με την οποία «τρέχει» το μέτωπο ενός ντόμινο και άλλο η μικρή ταχύτητα πτώσης των πεσών του.



Η ταχύτητα του σημείου επαφής.



Από το αυτοκίνητο κρέμεται ένα κόκκινο σχοινί.

Αυτό εφάπτεται με το έδαφος σε διαφορετικό κάθε στιγμή σημείο του. Παρά το ότι τα σημεία του εδάφους είναι ακίνητα λέμε ότι:

-Το σημείο επαφής κινείται με την ταχύτητα του αυτοκινήτου».

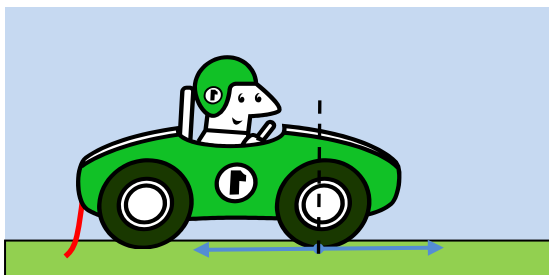
Αυτά είναι αφαιρέσεις κατανοητές σε μας και σε όσους μας ακούν.

Υπάρχουν δύο σημεία επαφής. Το σημείο του αυτοκινήτου που είναι σε επαφή με το έδαφος.

Αυτό κινείται με την ταχύτητα του αυτοκινήτου.

Υπάρχει και το σημείο του εδάφους που είναι σε επαφή με το αυτοκίνητο. Αυτό είναι ακίνητο.

Απλά αλλάζει το σημείο επαφής. Η όποια κίνηση αποδίδουμε σ' αυτό είναι κίνηση όσο κίνηση είναι αυτή του σημείου E στο γεωμετρικό παράδειγμα. Όσο είναι κίνηση αυτή του παλμού ή αυτή του ντόμινο.



Το σημείο της ρόδας που κάθε στιγμή είναι σε επαφή με το έδαφος έχει διαφορετική ταχύτητα.

Αν δεν έχουμε ολίσθηση η ταχύτητά του είναι μηδενική.

Αν ο τροχός όμως σπινιάρει έχει ταχύτητα προς τα πίσω.

Λέμε ότι «το σημείο επαφής έχει ταχύτητα προς τα πίσω»

και φυσικά δεν εννοούμε ότι τα σημεία του εδάφους κινούνται προς τα πίσω.

Η εστιγμένη ευθεία είναι ένας γεωμετρικός τόπος. Αυτός «κινείται» με ότι αυτό σημαίνει.

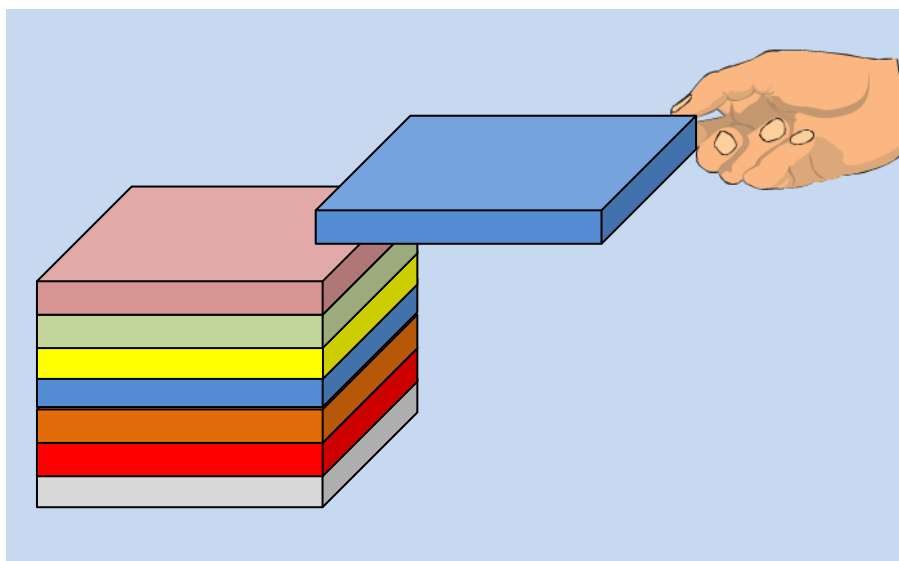
Κινείται με την ταχύτητα του αυτοκινήτου. Όμως το σημείο της ρόδας που εφάπτεται στιγμιαία με το έδαφος έχει άλλη ταχύτητα. Ίσως μηδενική.

Κάποιες φορές σκεφτόμαστε ότι το σημείο επαφής δεν έχει μηδενική ταχύτητα. Σκεφτόμαστε ότι κινείται με την ταχύτητα του αυτοκινήτου. Μια τέτοια κίνηση όμως είναι κίνηση ίδιας φύσης με αυτήν το E.

Όχι κίνηση ενός συγκεκριμένου σημείου αλλά «κίνηση» λόγω αλλαγής του σημείου επαφής. Όπως και το E θεωρούμε ότι κινείται, ενώ απλά το ένα E αντικαθιστά το άλλο.

Μια τέτοια κατάσταση, κατά την οποία ένα σημείο αντικαθίσταται συνεχώς από άλλα το εκλαμβάνουμε ως κίνηση. Όπως την κίνηση ενός όρους ή ενός πυκνώματος. Ενός παλμού.

Τα βιβλία.



Το χέρι τοποθετεί ένα βιβλίο πάνω από τον σωρό. Το βιβλίο δεν έχει ταχύτητα κατακόρυφη.

Ένα άλλο χέρι τοποθετεί άλλο βιβλίο, επίσης χωρίς κατακόρυφη ταχύτητα.

Όσο ο γρήγορος εκατόγχειρας τοποθετεί βιβλία, ο σωρός ψηλώνει.

Με ένα πρόγραμμα όπως το Tracker ή με έναν αισθητήρα απόστασης θα μπορούσαμε να μετρήσουμε την «ταχύτητα» με την οποία «κινείται» η

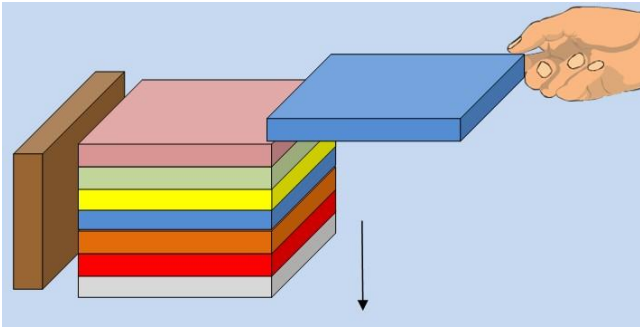
πάνω επιφάνεια του σωρού.

Η επιφάνεια κινείται κατακόρυφα αλλά όχι τα βιβλία. Κίνηση που μοιάζει με την κίνηση του E.

Το ότι τα βιβλία δεν έχουν απειροστό πάχος καθιστά ασυνεχή την κίνηση. Αν όμως βάφαμε μια επιφάνεια; Δεν θα ψήλωνε λόγω απόθεσης βαφής;

Κινείται η βαφή ή απλά αποτίθεται ένα καινούριο ακίνητο στρώμα πάνω από το άλλο;

Η ακίνητη επιφάνεια.

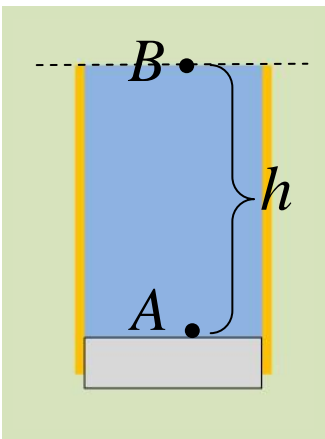


Τα βιβλία κινούνται, ενώ η αριστερή καφέ πλάκα μένει ακίνητη. Ο εκατόγχειρας τοποθετεί βιβλία συνεχώς ώστε το πάνω μέρος του σωρού να είναι «στα ίσα» με το πάνω μέρος της πλάκας.

Ένας αισθητήρας ταχύτητας θα μετρούσε μηδενική ταχύτητα του σωρού.

Όμως ξέρουμε ότι κινείται. Συζήτηση για την ταχύτητα του πάνω βιβλίου δεν θα είχε νόημα αν το πρόβλημα ήταν σχετικό με την δυναμική και την κινητική ενέργεια του σωρού. Ποιος ασχολείται με ένα βιβλίο;

Το νερό.



Το κυλινδρικό δοχείο περιέχει νερό.

Το κάτω έμβολο ανεβαίνει με ταχύτητα σταθερή και ίση με 0,1 m/s.

Το νερό ξεχειλίζει αλλά η επιφάνειά του μένει στην ίδια θέση.

Έχει μηδενική ταχύτητα.

Έχουν τα στοιχεία του ρευστού της επιφάνειας μηδενική ταχύτητα;

Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι οι ταχύτητές τους είναι οριζόντιες διότι χύνεται. Όμως εκεί είναι το θέμα;

Αν σε απασχολεί η κινητική ενέργεια του νερού, ποια ταχύτητα θα προσάψεις σ' αυτό;

Θα προσάψεις την μηδενική ταχύτητα;

Την όποια οριζόντια ταχύτητα έχουν οι μάζες της επιφάνειας;

Θα προσάψεις την ταχύτητα 0,1 m/s ;

Ρητορικά τα ερωτήματα.

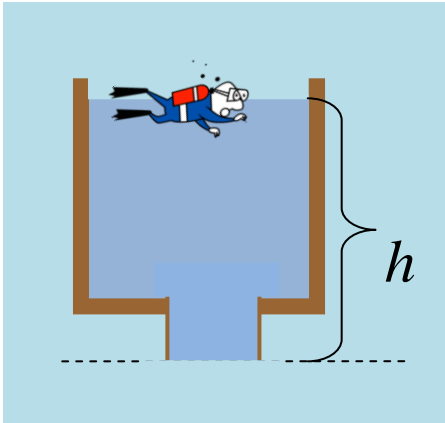
Σκεφτείτε όμως έναν που μπερνουλίζει από το A στο B, ως έχει κάθε δικαίωμα.

Θεωρεί μηδενική την ταχύτητα στο B. Γράφει:

$$P_B + \rho \cdot g \cdot h = P_A + \frac{1}{2} \rho \cdot v_A^2 \Rightarrow P_A - P_B = \rho \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} \rho \cdot v_A^2 \quad \text{αντί } P_A - P_B = \rho \cdot g \cdot h$$

Άσε που με μεγάλη ταχύτητα και μικρό ύψος η διαφορά μπορεί να προκύψει και αρνητική!

Πάλι το νερό.



Θέλεις να υπολογίσεις την ταχύτητα u εκροής σε ένα στενό δοχείο.

Ποια θα βάλεις ως ταχύτητα επιφάνειας;

Θα βάλεις την ταχύτητα $u \cdot \frac{S}{A}$ (λόγος διατομών);

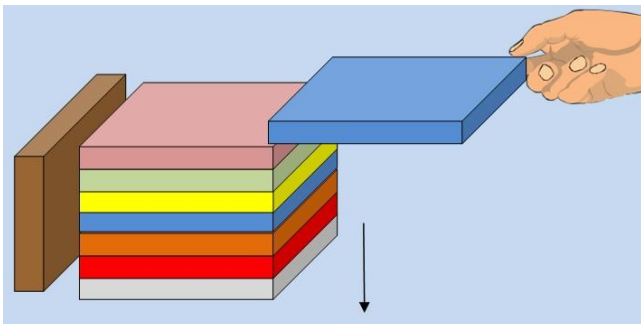
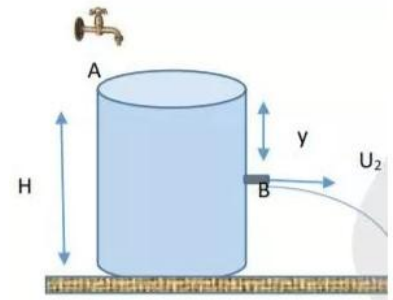
Θα βάλεις την ταχύτητα που προσδίδει στις εκεί μάζες ο μικρός κολυμβητής;

Στην γνωστή άσκηση ποια είναι η ταχύτητα της επιφάνειας αν οι παροχές εισόδου και εξόδου είναι ίσες;

Προφανώς η ταχύτητα του γεωμετρικού τόπου είναι μηδενική.

Μάζες νερού όμως κινούνται προς τα κάτω.

Η περίπτωση μοιάζει πολύ με αυτήν των βιβλίων που κατεβαίνουν.



Τα βιβλία κινούνται αλλά η επιφάνεια-γεωμετρικός τόπος δεν κινείται.

Ενδεχομένως κάποιος φίλος να πει ότι διαφέρει η κατάσταση αυτή από το νερό, διότι τα βιβλία μπαίνουν συνεχώς στο πάνω μέρος, ενώ το νερό....

Αν υπάρχει τέτοια ένσταση τότε.....

Ας θεωρήσουμε τα βιβλία λεπτά σαν τραπουλόχαρτα. Ας υποθέσουμε ότι ένας χαρτοπαίχτης εκατόγχειρας χώνει χαρτιά όπου λάχει. Πάνω, στη μέση κ.λ.π. έτσι ώστε ένας ηχοβολιστικός αισθητήρας απόστασης να καταγράφει μηδενική ταχύτητα επιφάνειας. Η τράπουλα-νερό θα έχει κινητική ενέργεια;

Επίλογος.

Πιστεύω ότι η όποια πολυπλοκότητα τοπικά δεν πρέπει να μας εμποδίζει όταν νερό εκρέει από ένα δοχείο. Ότι και να κάνει η επιφάνειά του η ταχύτητα εκροής είναι με καλή προσέγγιση:

$$v = \sqrt{2g \cdot h \cdot \frac{A^2}{A^2 - S^2}}, \text{ όπου } S \text{ και } A \text{ οι διατομές και } h \text{ το ύψος εκείνη την στιγμή.}$$

Ο γενικευμένος νόμος Bernoulli εκεί θα κατέληγε με άριστη προσέγγιση.

