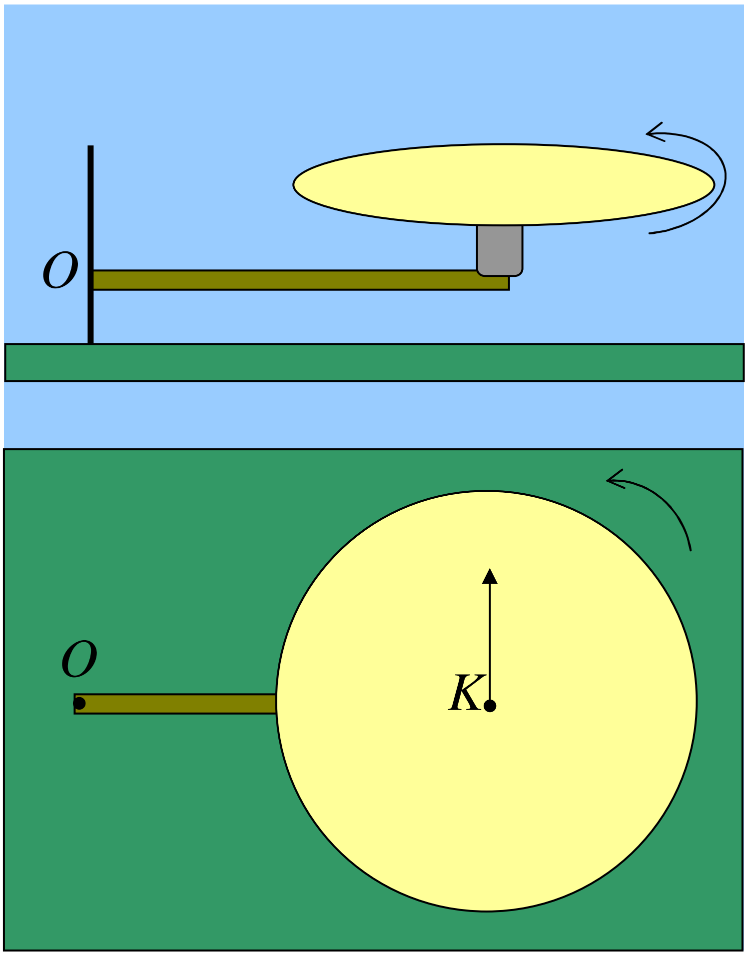
Η στροφορμή ενός δίσκου.



Ο δίσκος έχει μάζα 100 kg και ακτίνα 1 m. Περιστρέφεται από αβαρές μοτεράκι, στηριγμένο στην άκρη αβαρούς ράβδου μήκους 2 m.
Τριβές και αντιστάσεις δεν υπάρχουν.

Το μοτεράκι περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 1 rad/s και το κέντρο K του δίσκου κινείται με ταχύτητα μέτρου 2 m/s περί το O.

1. Ποια είναι η στροφορμή του δίσκου ως προς το O;
2. Κάποια στιγμή το μοτεράκι ακινητοποιείται. Ποια θα είναι η νέα ταχύτητα του σημείου K;
3. Πόση ενέργεια χάθηκε;

Μια λανθασμένη απάντηση:
Η στροφορμή του δίσκου είναι το άθροισμα της τροχιακής στροφορμής του και της ιδιοστροφορμής του:

$$I = m\cdot\upsilon\cdot(OK)+\frac{m\cdot R^2}{2}\cdot\omega$$
$$=\left(100\cdot2\cdot2+\frac{100\cdot1}{2}\cdot1\right)\frac{kg\cdot m^2}{s}=450\frac{kg\cdot m^2}{s}$$

Που έγκειται η γκάφα;
Ο δίσκος δεν περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 1 rad/s. Ακόμα και αν το μοτεράκι ήταν «μπλοκαρισμένο» και ο δίσκος δεν περιστρεφόταν ως προς την ράβδο, θα περιστρεφόταν ως προς το έδαφος με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου.
Τώρα ο δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega=\omega_\mu+\omega_\rho=\omega_\mu+\frac{\upsilon}{(OK)}=2\frac{rad}{s}.$$

Μία σωστή απάντηση:
Η στροφορμή του δίσκου είναι το άθροισμα της τροχιακής στροφορμής του και της ιδιοστροφορμής του:

$$L=m\cdot\upsilon\cdot(OK)+\frac{m\cdot R^2}{2}\cdot\omega=\left(100\cdot2\cdot2+\frac{100\cdot1}{2}\cdot2\right)\frac{kg\cdot m^2}{s}=500\frac{kg\cdot m^2}{s}$$

Μια τολμηρή απάντηση:

Θα μπορούσαμε να φέρουμε τον δίσκο στην ίδια κατάσταση κάνοντας δύο χειρισμούς:
1. Φροντίζαμε να παραμείνει ακίνητος ως προς την ράβδο, την οποία περιστρέφει ένα άλλο μοτέρ με γωνιακή ταχύτητα ω_ρ.
2. Τον αναγκάζαμε να κινηθεί με γωνιακή ταχύτητα 1 rad/s ως προς την ράβδο.

Η στροφορμή που θα αποκτούσε από την πρώτη ενέργεια θα ήταν:

$$L_1=I_O\cdot\omega_\rho=\left(m\cdot(OK)^2+I_{cm}\right)\cdot\omega_\rho=\left(m\cdot(OK)^2+\frac{m\cdot R^2}{2}\right)\cdot\omega_\rho=450\frac{kg\cdot m^2}{s}$$

Η στροφορμή που θα έβλεπε ένας παρατηρητής ευρισκόμενος επί της ράβδου θα ήταν μηδενική μέχρι να αρχίζει να γυρίζει το μοτεράκι. Αυτό θα έδινε στον δίσκο μια στροφορμή που θα ήταν:

$$L_2 = \frac{m \cdot R^2}{2} \cdot \omega_\mu = 50 \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

Η ολική στροφορμή είναι:

$$L = L_1 + L_2 = 450 \frac{kg \cdot m^2}{s} + 50 \frac{kg \cdot m^2}{s} = 500 \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

Λύση υπερβολικά αυθαίρετη. Αν χρησιμοποιηθεί σε άλλη περίπτωση θα οδηγήσει σε λάθη χοντρά. Λάθη που δεν θα εντοπίζονται εύκολα.

2. Αν ακινητοποιηθεί ο δίσκος ως προς την ράβδο, θα περιστρέφεται με αυτήν ως ένα στερεό με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\tau\varepsilon\lambda}$. Το στερεό αυτό θα έχει ροπή αδράνειας:

$$I_O = m \cdot (OK)^2 + I_{cm} = m \cdot (OK)^2 + \frac{m \cdot R^2}{2} = 450 kg \cdot m^2$$

Η στροφορμή διατηρείται λόγω απουσίας τριβών. Έτσι:

$$I_O \cdot \omega_{\tau\varepsilon\lambda} = L \Rightarrow \omega_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{L}{I_O} = \frac{10}{9} \, rad/s \approx 1{,}11 \, rad/s$$

3. Η ενέργεια που χάθηκε είναι:

$$K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + \frac{1}{4} m \cdot R^2 \cdot \omega^2 - \frac{1}{2} I_O \cdot \omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 \approx 222{,}22 J$$

Η ενέργεια αυτή μετετράπη σε θερμική λόγω τριβών. Για να ακινητοποιηθεί ο δίσκος ως προς την ράβδο χρειάζεται ένα είδος φρένου. Η ροπή του φρένου επιβραδύνει τον δίσκο.
Το περίεργο είναι ότι η ροπή-αντίδραση επιταχύνει την περιστροφή της ράβδου.
Όντως η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αυξήθηκε από $1 \, rad/s$ σε $1{,}11 \, rad/s$.